

# Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 16

**Powtórzenie**

[math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf](http://math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf)

**Przestrzeń unormowana**  $\equiv$  przestrzeń liniowa  $X$  nad  $\mathbb{F} := \mathbb{R}, \mathbb{C}$  z **normą**, czyli funkcją  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  spełniająca:

Ⓐ  $\|x\| = 0 \iff x = 0,$  (niezdegenerowanie)

Ⓑ  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$  (dodatnia jednorodność)

Ⓒ  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$  (nierówność trójkąta)

**Przestrzeń Banacha**  $\equiv$  przestrzeń unormowana  $(X, \|\cdot\|)$  zupełna:

$$\underbrace{\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0}_{\text{ciąg Cauchy}} \implies \underbrace{\exists_{x_0 \in X} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0}_{\text{ciąg zbieżny}}.$$

- ❶  $\dim(X) < \infty \implies X$  przestrzeń Banacha.
- ❷ Podprzestrzeń liniowa  $Y \subseteq X$  przestrzeni Banacha  $X$  jest przestrzenią Banacha  $\iff Y$  jest domknięta.
- ❸ Przestrzeń unormowana  $X$  jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg absolutnie zbieżny jest zbieżny w  $X$ .
- ❹ Każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić.

# Przestrzenie funkcji ciągłych na przestrzeni topologicznej $\Omega$

$C(\Omega)$  - przestrzeń funkcji ciągłych (przestrzeń liniowa)

$C_b(\Omega)$  - przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych

$C_0(\Omega)$  - przestrzeń funkcji ciągłych i znikających w  $\infty$

przestrzeń  
Banacha z normą  
 $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |x(t)|$

$C_c(\Omega)$  - przestrzeń funkcji ciągłych o zwartych nośnikach

$$C_c(\Omega) \subseteq C_0(\Omega) \subseteq C_b(\Omega) \subseteq C(\Omega)$$

$$\Omega \text{ zwarta} \iff C_c(\Omega) = C_0(\Omega) = C_b(\Omega) = C(\Omega)$$

$$\Omega \text{ lokalnie zwarta Hausdorffa} \implies \overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\Omega)$$

$\ell^\infty$  - przestrzeń ciągów ograniczonych

$c$  - przestrzeń ciągów zbieżnych

$c_0$  - przestrzeń ciągów zbieżnych do zera

przestrzeń Banacha z normą  
 $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$

$c_{00}$  - przestrzeń ciągów skończonych (niezupełna)

$$c_{00} \subseteq c_0 = \overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$

# Przestrzenie funkcji na przestrzeni z miarą, $p \in [1, \infty]$

$(\Omega, \Sigma, \mu)$  - przestrzeń z miarą

**Przestrzeń funkcji całkowalnych w  $p$ -tej potęgde,  $p < \infty$**

$$L^p(\mu) := \{x : \Omega \rightarrow \mathbb{F} : \|x\|_p := \left( \int_{\Omega} |x(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

oraz **przestrzeń funkcji istotnie ograniczonych**:

$$L^\infty(\mu) := \{x : \Omega \rightarrow \mathbb{F} : \|x\|_\infty := \underbrace{\inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A} |x(t)|}_{\text{supremum istotne}} < \infty\}$$

## Twierdzenie (Nierówność Höldera)

Jeśli  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p \in [1, \infty)$ ,  $x \in L^p(\mu)$  oraz  $y \in L^q(\mu)$

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

# Klasyczne przestrzenie Banacha

W poniższej tabelce  $p \in [1, \infty)$ .

| Ozn.            | <b>przestrzeń Banacha</b>                   | <b>norma</b>                                                            |
|-----------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $B(\Omega)$     | funkcje ograniczone                         | $\ x\ _\infty = \sup_{t \in \Omega}  x(t) $                             |
| $C_b(\Omega)$   | funkcje ciągłe i ograniczone                | $\ x\ _\infty = \sup_{t \in \Omega}  x(t) $                             |
| $C_0(\Omega)$   | funkcje ciągłe, znikające w nieskończoności | $\ x\ _\infty = \max_{t \in \Omega}  x(t) $                             |
| $L^p(\mu)$      | „funkcje” całkowne w $p$ -tej potęgde       | $\ x\ _p = \left( \int_{\Omega}  x(t) ^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$    |
| $L^\infty(\mu)$ | „funkcje” istotnie ograniczone              | $\ x\ _\infty = \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in \Omega \setminus A}  x(t) $ |
| $\ell^\infty$   | ciągi ograniczone                           | $\ x\ _\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}}  x(k) $                         |
| $\ell^p$        | ciągi sumowalne w $p$ -tej potęgde          | $\ x\ _p = \left( \sum_{k=1}^{\infty}  x(k) ^p \right)^{\frac{1}{p}}$   |
| $c$             | ciągi zbieżne                               | $\ x\ _\infty = \max_{k \in \mathbb{N}}  x(k) $                         |
| $c_0$           | ciągi zbieżne do zera                       | $\ x\ _\infty = \max_{k \in \mathbb{N}}  x(k) $                         |

# Operatory ograniczone

$(X, \|\cdot\|)$  i  $(Y, \|\cdot\|)$  ustalone przestrzenie unormowane

**Def. Operator**  $\equiv$  odwzorowanie liniowe  $T : X \rightarrow Y$ .

$T$  jest **ograniczony**  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists_{C \geq 0} \forall_{x \in X} \|Tx\| \leq C\|x\|$  (nierówność ograniczoności)

**Norma operatora**  $T \equiv$  najmniejsza stała  $C$  w powyższej nierówności

$$\|T\| := \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ dla każdego } x \in X\}$$

Równoważnie  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ .

- Operator liniowy jest **ograniczony**  $\iff$  **ciągły**
- $\dim(X) < \infty \implies$  każdy operator  $T : X \rightarrow Y$  jest ograniczony
- $\|\cdot\|$  jest normą na **przestrzeni operatorów ograniczonych**

$$B(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \text{ operator liniowy i ograniczony}\}$$

- $B(X, Y)$  jest przestrzenią Banacha  $\iff Y$  jest Banacha
- **Przestrzeń dualna**  $X^* = B(X, \mathbb{F})$  – funkcjonały ograniczone

Iloczyn skalarny funkcja  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{F}$  spełniająca

①  $\langle x, x \rangle \geq 0$  oraz  $\langle x, x \rangle > 0$  dla  $x \neq 0$  (dodatnio-określoność)

②  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ , (liniowość w 1-argumencie)

③  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ , (antysymetria)

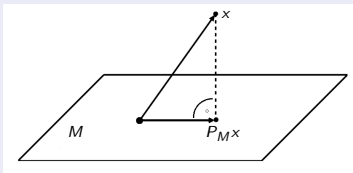
dla  $x, y, z \in H$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ .

- iloczyn skalarny zadaje normę wzorem  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- **przestrzeń Hilberta**  $\equiv$  przestrzeń Banacha z normą  
zadaną przez iloczyn skalarny
- norma jest zadana przez iloczyn skalarny  $\iff$  spełniona jest  
**tożsamość równoległoboku**
- $L^p(\mu)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , jest przestrzenią Hilberta  $\iff p = 2$
- Każda przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z  
przestrzenią  $L^2(\mu)$  (dla pewnej miary  $\mu$ ),

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t) \cdot \overline{y(t)} d\mu$$

$H$  – ustalona przestrzeń Hilberta,  $x, y \in H$ ,  $M \subseteq H$

- $x \perp y \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle x, y \rangle = 0$ ,  $x \perp M \stackrel{\text{def}}{\iff} x \perp y$  dla każdego  $y \in M$
- $M^\perp := \{x \in H : x \perp M\}$  jest domkniętą podprzestrznią liniową.
- Dla domkniętej podprzestrzeni  $M \subseteq H$  mamy  $H = M \oplus M^\perp$ .
- **rzut ortogonalny** wektora  $x \in H$  na podprzestrzeń  $M \subseteq H$  nazywamy wektor  $P_M x \in M$  taki, że  $x - P_M x \perp M$ .



- Rzut ortogonalny na domkniętą podprzestrzeń  $M$  zawsze istnieje, jest wyznaczony jednoznacznie oraz  $\|x - P_M x\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$
- Rzutowanie  $P_M : H \rightarrow H$  jest operatorem liniowym, kontraktywnym, samosprzeżonym oraz idempotentnym.
- Idempotentny operator liniowy  $P : H \rightarrow H$  jest rzutem ortogonalnym (na  $M := PH$ )  $\iff \|P\| \leq 1 \iff P = P^*$ .

$H, K$  – przestrzenie Hilberta,

- $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq H$  **baza ortonormalna**  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  maksymalny układ ortonormalny w  $H \iff$  dla każdego  $x \in H$  mamy

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$



Joseph Fourier

- Baza ortonormalna zawsze istnieje (Lemat Kuratowskiego-Zorna)
- **Wymiar przestrzeni Hilberta**  $\dim(H)$  = moc bazy ortonormalnej (niezależy od wyboru - twierdzenie Cantora-Bernsteina)
- $H \cong K$  unitarnie  $\iff \dim(H) = \dim(K)$
- **Operator sprzężony** do  $T \in B(H, K)$  to  $T^* \in B(K, H)$ , t.ż.  
 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{dla } x \in H, y \in K.$

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| $T = T^*$          | samosprężony     |
| $TT^* = T^*T$      | normalny         |
| $P^2 = P, P = P^*$ | rzut ortogonalny |
| $U^*U = 1$         | izometria        |
| $U^*U = UU^* = 1$  | unitarny         |

**Funkcjonały przedłużają się z zachowaniem normy !**

## Twierdzenie Hahna-Banacha

Każdy ograniczony funkcjonał liniowy  $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{F}$  określony na podprzestrzeni liniowej  $X_0 \subseteq X$  **przedłuża się** do ograniczonego funkcjonału liniowego  $f : X \rightarrow \mathbb{F}$  takiego, że  $\|f\| = \|f_0\|$ .

## Wnioski

- 1 Funkcjonały ograniczone rozdzielają punkty w  $X$
- 2 Każda przestrzeń unormowana  $X$  zanurza się w przestrzeń podwójnie sprzężoną  $X^{**} := (X^*)^*$
- 3 Przestrzeń nazywamy **refleksywną** jeżeli powyższe zanurzenie daje izomorfizm  $X \cong X^{**}$



| Refleksywne                                                                                       | Nierefleksywne                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| przestrzeń skończenie wymiarowe,<br>przestrzeń Hilberta,<br>przestrzeń $L^p$ dla $1 < p < \infty$ | $c_0$ , $C[a, b]$ , $\ell^1$ , $\ell^\infty$ ,<br>$L^1([a, b])$ , $L^\infty([a, b])$ |

- $H \stackrel{\text{anty}}{\cong} H^*$  dla dowolnej przestrzeni Hilberta (**Riesz-Fréchet**):

$$f \in H^* \iff \exists_{y \in H} f(x) = \langle x, y \rangle$$

i wtedy  $\|f\| = \|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ .

- $L^p(\mu)^* \cong L^q(\mu)$ , gdzie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p \in [1, \infty)$ ,  $q \in (1, \infty]$ :

$$f \in L^p(\mu)^* \iff \exists_{y \in L^q(\mu)} f(x) = \int_{\Omega} x \cdot y \, d\mu.$$

Ponadto, wtedy  $\|f\| = \|y\|_q = \begin{cases} (\int_{\Omega} |y|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}}, & p > 1, \\ \text{ess sup } |y|, & p = 1. \end{cases}$

- $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ , gdzie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Tzn.  $f \in (\ell^p)^* \iff \exists_{y \in \ell^q}$

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$  i wtedy  $\|f\| = \|y\|_q$ .

- $c_0^* \cong \ell^1$ :  $f \in c_0^* \iff \exists_{y \in \ell^1} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$ ,  $\|f\| = \|y\|_1$